AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość elementów maszyn

Wykład Nr 6

Metoda sił

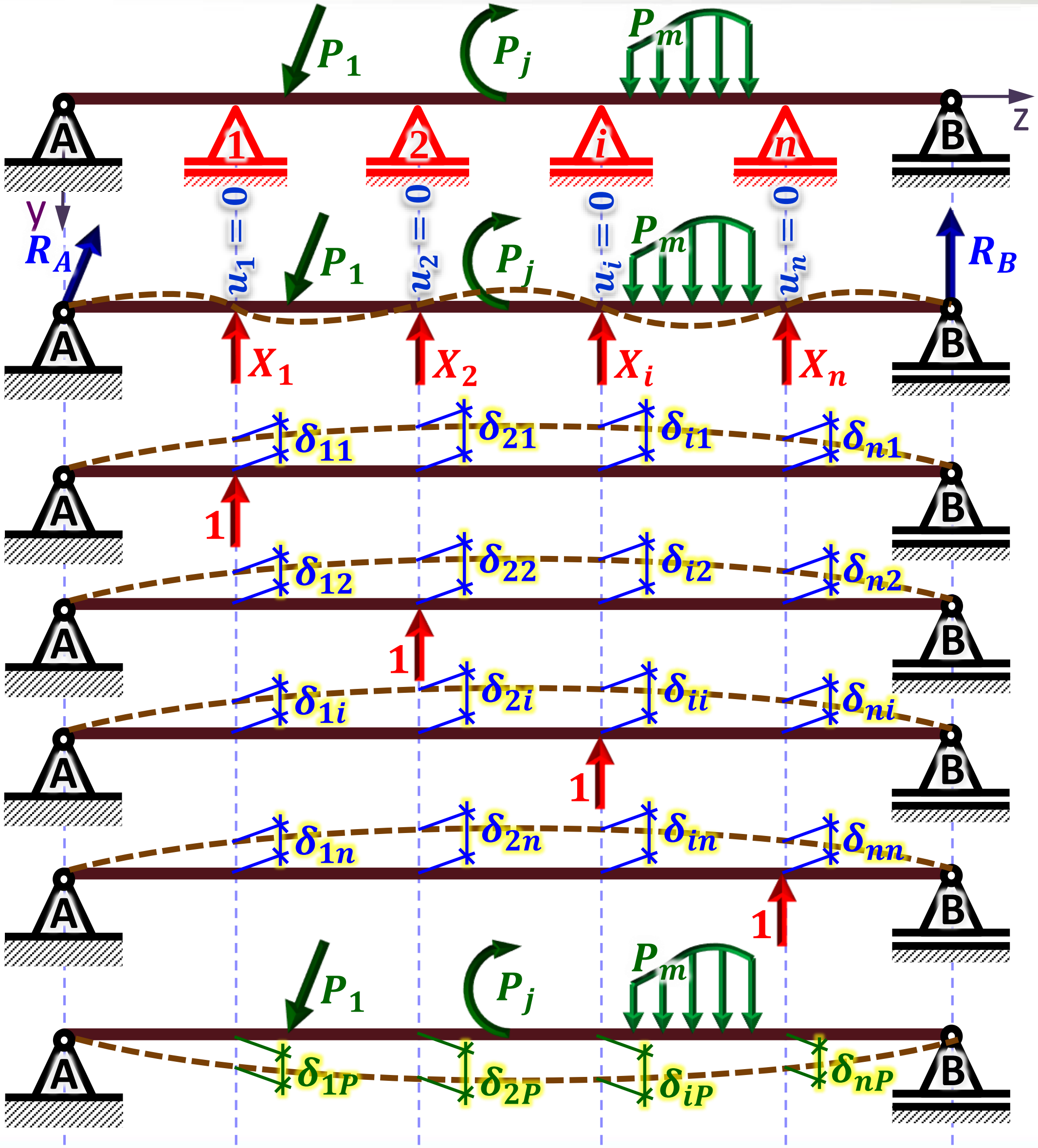
równania kanoniczne, rozwiązywanie statycznie niewyznaczalnych belek i konstrukcji ramowych, ramy wewnętrznie statycznie niewyznaczalne

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn

dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH

machniew@agh.edu.pl

6.1. Równania kanoniczne



$$0 = u_1 = \delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \delta_{1i}\cdot X_i + \delta_{1n}\cdot X_n + \delta_{1P}$$

$$0 = u_2 = \delta_{21}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \delta_{2i}\cdot X_i + \delta_{2n}\cdot X_n + \delta_{2P}$$

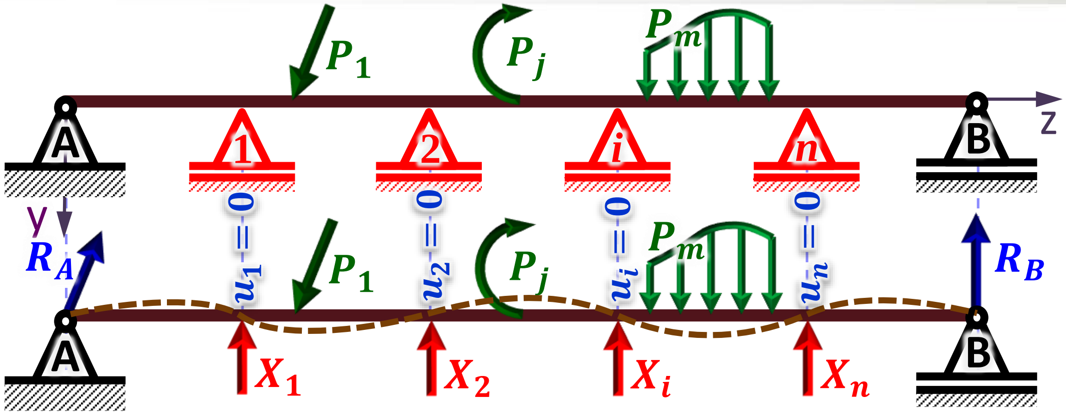
$$\cdots$$

$$0 = u_i = \delta_{i1}\cdot X_1 + \delta_{i2}\cdot X_2 + \delta_{ii}\cdot X_i + \delta_{in}\cdot X_n + \delta_{iP}$$

$$\cdots$$

$$0 = u_n = \delta_{n1}\cdot X_1 + \delta_{n2}\cdot X_2 + \delta_{ni}\cdot X_i + \delta_{nn}\cdot X_n + \delta_{nP}$$

6.1. Równania kanoniczne



UWAGA:
Rozwiązując zadania „opłaca się” pamiętać o twierdzeniu Maxwella:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

W efekcie otrzymujemy:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \ldots + \delta_{1i}\cdot X_i + \ldots + \delta_{1n}\cdot X_n + \delta_{1P} = 0 \\
\delta_{21}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \ldots + \delta_{2i}\cdot X_i + \ldots + \delta_{2n}\cdot X_n + \delta_{2P} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{i1}\cdot X_1 + \delta_{i2}\cdot X_2 + \ldots + \delta_{ii}\cdot X_i + \ldots + \delta_{in}\cdot X_n + \delta_{iP} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1}\cdot X_1 + \delta_{n2}\cdot X_2 + \ldots + \delta_{ni}\cdot X_i + \ldots + \delta_{nn}\cdot X_n + \delta_{nP} = 0
\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}
X_1 = \\
X_2 = \\
\ldots\ldots \\
X_i = \\
\ldots\ldots \\
X_n =
\end{array}\right.$$

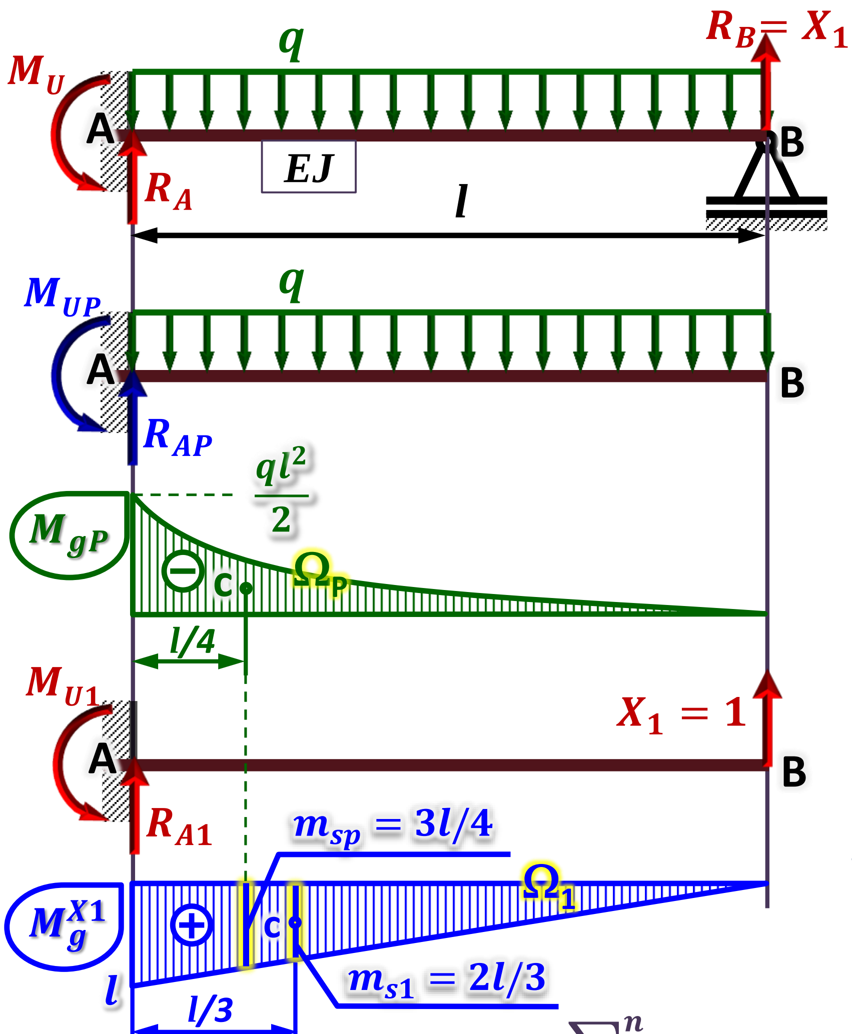
gdzie:

$X_1 \ldots X_n$ - wartości reakcji hiperstatycznych,

δ_{ik} - liczba wpływowa siły X_k na przemieszczeniu u_i, tj. wartość przemieszczenia u_i wywołana siłą $X_k = 1$,

δ_{iP} - przemieszczenie wywołane przez całe obciążenie czynne (P) w punkcie i na kierunku działania siły X_k.

Przykład 6.1: Wykorzystując metodę sił wyznaczyć reakcje belki jak na rysunku.



Dane: EJ=const, q, l Szukane: R_A, R_B, M_U

Układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny.

Równanie kanoniczne:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

Zgodnie z metodą Wereszczagina:

$$\left.\begin{aligned} \delta_{1P} &= \frac{1}{EJ}\Omega_P \cdot m_{sp} \\ \Omega_P &= -\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}l = \frac{ql^3}{6} \\ m_{sp} &= 3l/4 \end{aligned}\right] \Rightarrow \boxed{\delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EJ}}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ}\Omega_1 \cdot m_{s1} \\ \Omega_1 &= \frac{1}{2} \cdot l^2 \\ m_{s1} &= 2l/3 \end{aligned}\right] \Rightarrow \boxed{\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}}$$

Stąd: $$\frac{\cancel{l^3}}{3\cancel{EJ}} \cdot X_1 - \frac{ql^{\cancel{4}}}{8\cancel{EJ}} = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = X_1 = \frac{3ql}{8}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow R_A - ql + R_B = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5ql}{8}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow M_U - \frac{ql^2}{2} + R_B l = 0 \Rightarrow \boxed{M_U = \frac{ql^2}{8}}$$

por. z przykładem 5.2

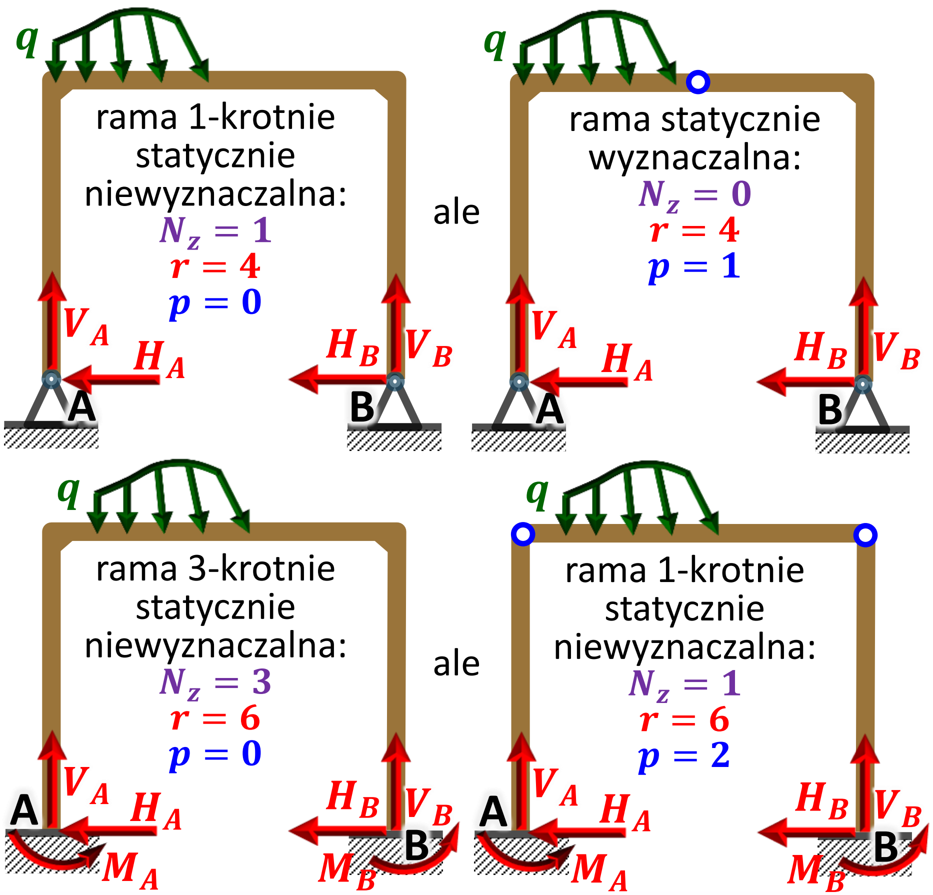
6.3. Ramy statycznie niewyznaczalne

Ramy zewnętrznie statycznie niewyznaczalne

W przypadku ram płaskich stopień zewnętrznej statycznej niewyznaczalności ramy wynosi:

$$N_z = r - 3 - p$$

r – liczba składowych reakcji
p – liczba przegubów

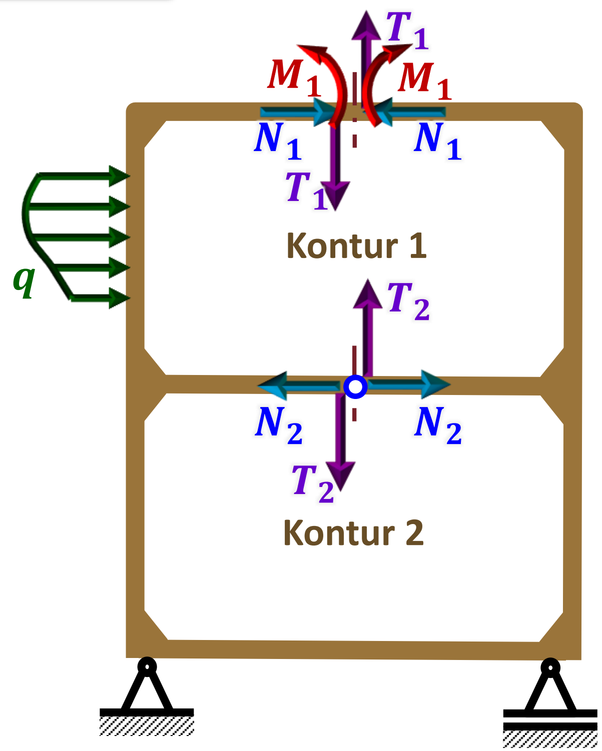


Ramy wewnętrznie statycznie niewyznaczalne

Wewnętrzna statyczna niewyznaczalność występuje w przypadku ram o konturach zamkniętych. Wielkościami hiperstatycznymi są siły wewnętrzne (N, T, M). W przypadku ram płaskich stopień wewnętrznej statycznej niewyznaczalności ramy wynosi:

$$N_w = 3n - p$$

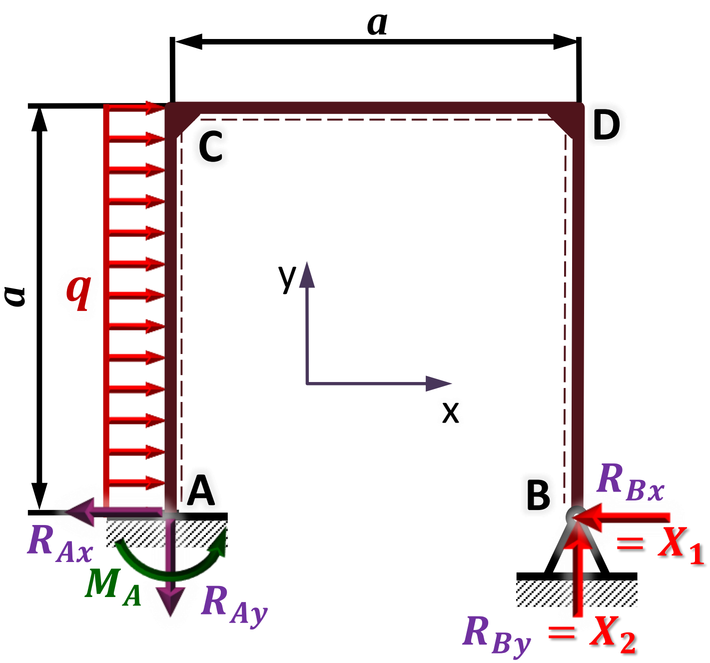
n - liczba konturów zamkniętych
p - liczba przegubów (na konturze)



rama 5-krotnie wewnętrznie statycznie niewyznaczalna:
$n = 2$, $p = 1 \rightarrow N_w = 5$

Przykład 6.2: Rozwiązać ramę jak na rysunku, wykorzystując metodę sił do wyznaczenia reakcji hiperstatycznych.

Dane: ***EJ*=const, *q*, *a*** Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$



1° Układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.

Przyjmijmy: $R_{BX}=X_1$, $R_{By}=X_2$

2° Warunki równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow -\frac{qa^2}{2} + X_2 a + M_A = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + X_2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = X_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \Rightarrow qa - R_{Ax} - X_1 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = qa - X_1$$

3° Równania kanoniczne:

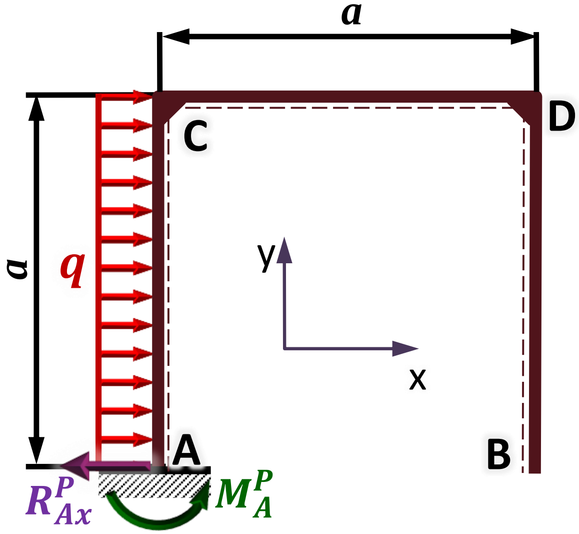
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P} = 0$$

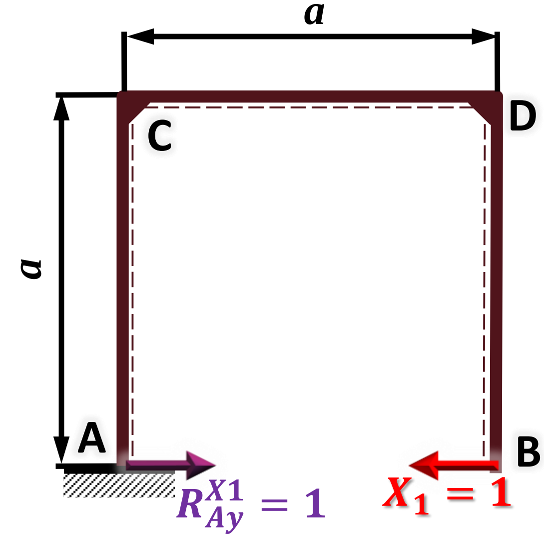
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P} = 0$$

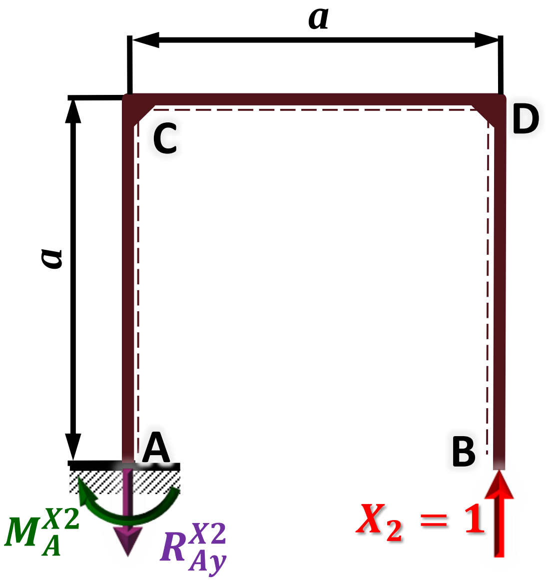
6.4. Rozwiązywanie ram statycznie niewyznaczalnych

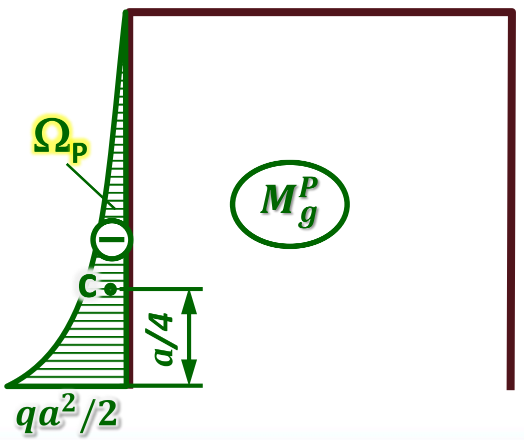
Przykład 6.2: Dane: ***EJ*=const, *q*, *a*** Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$

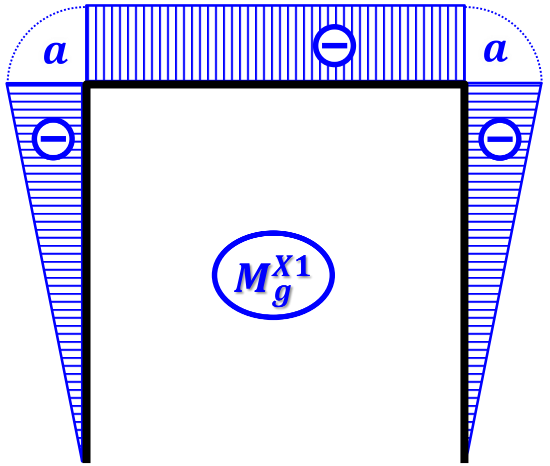
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P} = 0; \qquad \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P} = 0$$

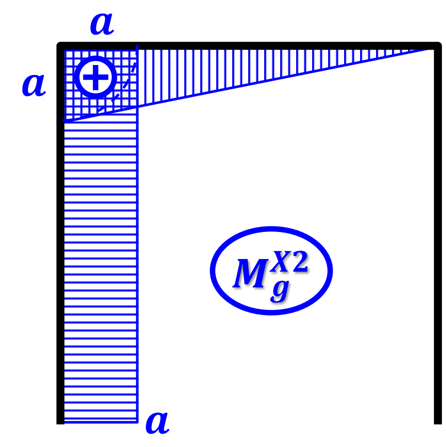








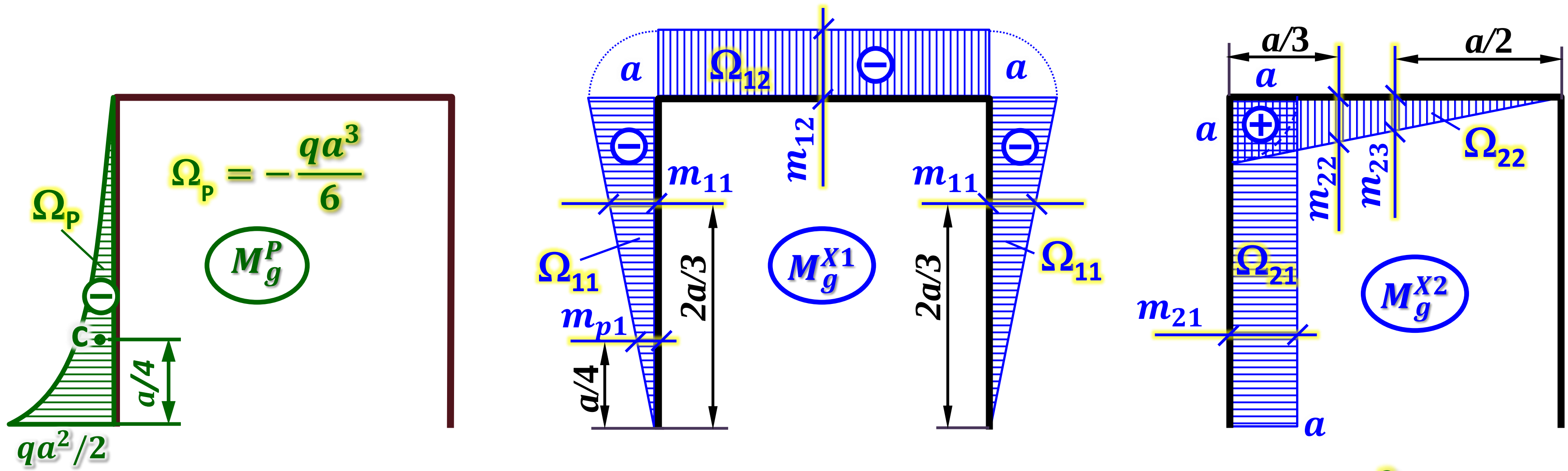




6.4. Rozwiązywanie ram statycznie niewyznaczalnych

Przykład 6.2: Dane: ***EJ*=const, *q*, *a*** Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$

$$\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\delta_{1P}=0;\qquad \delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{2P}=0$$



$$\delta_{1P}=\frac{1}{EJ}\Omega_P\cdot m_{p1}=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{qa^3}{6}\right)\left(-\frac{a}{4}\right)=\frac{qa^4}{24EJ}\qquad \delta_{2P}=\frac{1}{EJ}\Omega_P\cdot m_{21}=\frac{1}{EJ}\left(-\frac{qa^3}{6}\right)a=-\frac{qa^4}{6EJ}$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}(\Omega_{11}\cdot m_{11}\cdot 2+\Omega_{12}\cdot m_{12})=\frac{1}{EJ}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right)+(-a^2)\cdot(-a)\right)=\frac{5a^3}{3EJ}$$

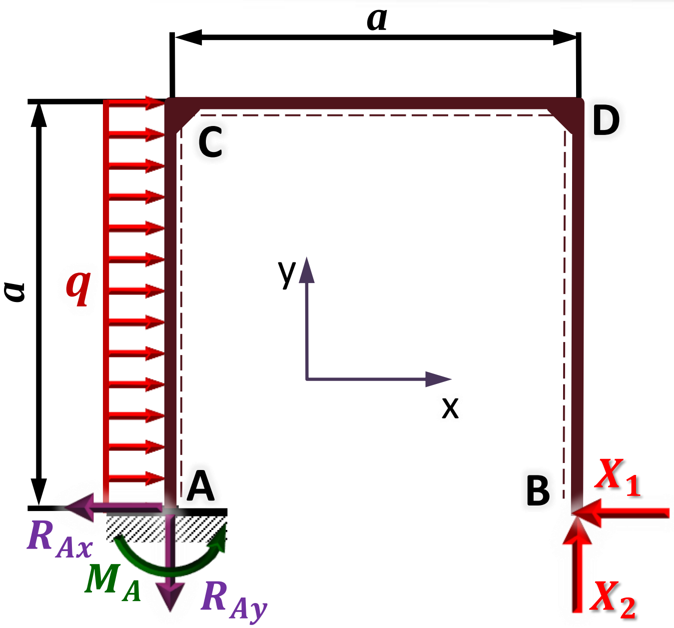
$$\delta_{22}=\frac{1}{EJ}(\Omega_{21}\cdot m_{21}+\Omega_{22}\cdot m_{22})=\frac{1}{EJ}\left(a^2\cdot a+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{2a}{3}\right)=\frac{4a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EJ}(\Omega_{11}\cdot m_{21}+\Omega_{12}\cdot m_{23})=\frac{1}{EJ}\left(\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\cdot a+(-a^2)\cdot\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^3}{EJ}=\delta_{12}$$ (twierdzenie Maxwella)

6.4. Rozwiązywanie ram statycznie niewyznaczalnych

Przykład 6.2:

Dane: ***EJ*=const, *q*, *a***   Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$



$$\left.\begin{array}{l}\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\delta_{1P}=0\\ \delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\delta_{2P}=0\\ \delta_{11}=\frac{5a^3}{3EJ}\quad \delta_{12}=-\frac{a^3}{EJ}\quad \delta_{1P}=\frac{qa^4}{24EJ}\\ \delta_{21}=-\frac{a^3}{EJ}\quad \delta_{22}=\frac{4a^3}{3EJ}\quad \delta_{2P}=-\frac{qa^4}{6EJ}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{5a^3}{3EJ}\cdot X_1-\frac{a^3}{EJ}\cdot X_2+\frac{qa^4}{24EJ}=0\\ -\frac{a^3}{EJ}\cdot X_1+\frac{4a^3}{3EJ}\cdot X_2-\frac{qa^4}{6EJ}=0\end{cases}\Bigg/:\frac{a^3}{EJ}$$

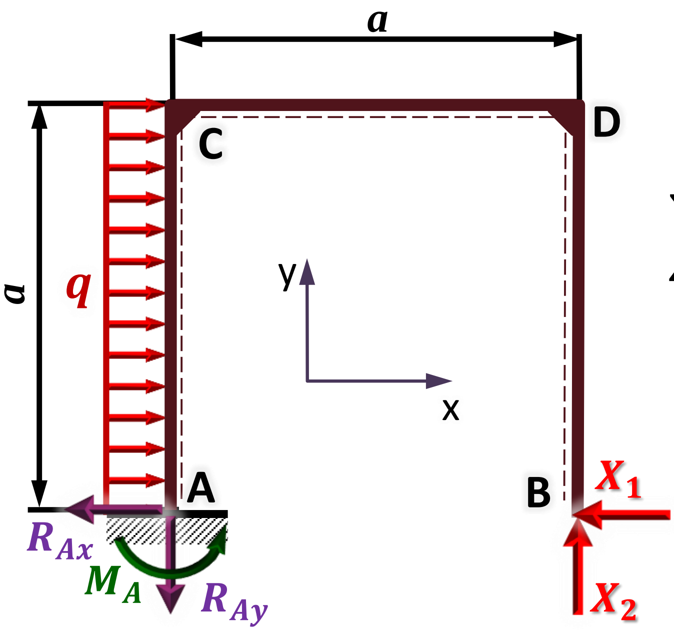
$$\left.\begin{cases}\frac{5}{3}X_1-X_2+\frac{qa}{24}=0 \Rightarrow X_2=\frac{5}{3}X_1+\frac{qa}{24}\\ -X_1+\frac{4}{3}X_2-\frac{qa}{6}=0\end{cases}\right\}\Rightarrow -X_1+\frac{4}{3}\left(\frac{5}{3}X_1+\frac{qa}{24}\right)-\frac{qa}{6}=0$$

$$-X_1+\frac{20}{9}X_1+\frac{qa}{18}-\frac{qa}{6}=0\Rightarrow\frac{11}{9}X_1=\frac{qa}{9}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\boxed{X_1=\frac{qa}{11}}\\ X_2=\frac{5}{3}X_1+\frac{qa}{24}\end{array}\right\}\Rightarrow X_2=\frac{5}{3}\frac{qa}{11}+\frac{qa}{24}\Rightarrow\boxed{X_2=\frac{17}{88}qa}$$

6.4. Rozwiązywanie ram statycznie niewyznaczalnych

Przykład 6.2: Dane: ***EJ*=const, *q*, *a*** Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$



$$X_1 = \frac{qa}{11} \qquad X_2 = \frac{17}{88}qa$$

Wracając do warunków równowagi statycznej:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0 \Rightarrow -\frac{qa^2}{2} + X_2 a + M_A = 0$$

$$M_A = \frac{17}{88}qa^2 - \frac{44}{88}qa^2 \Rightarrow \boxed{M_A = \frac{27}{88}qa^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + X_2 = 0$$

$$R_{Ay} = X_2 \Rightarrow \boxed{R_{Ay} = \frac{17}{88}qa}$$

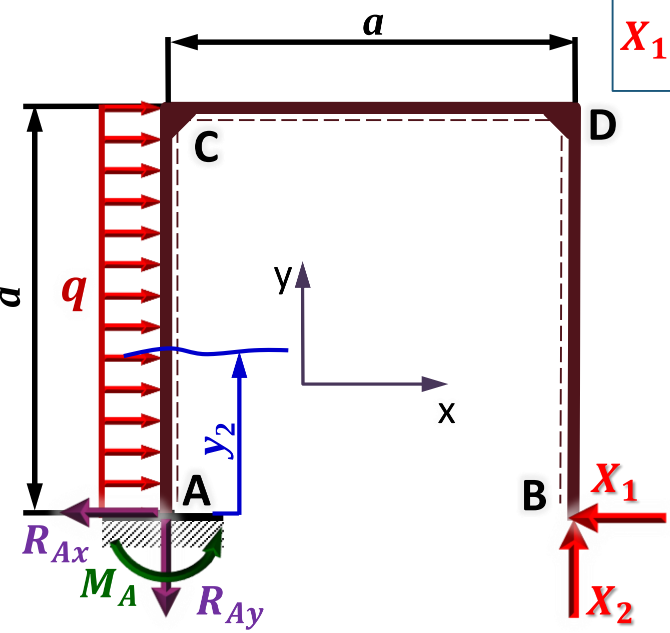
$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \Rightarrow qa - R_{Ax} - X_1 = 0 \Rightarrow R_{Ax} = qa - \frac{qa}{11} \Rightarrow \boxed{R_{Ax} = \frac{10}{11}qa}$$

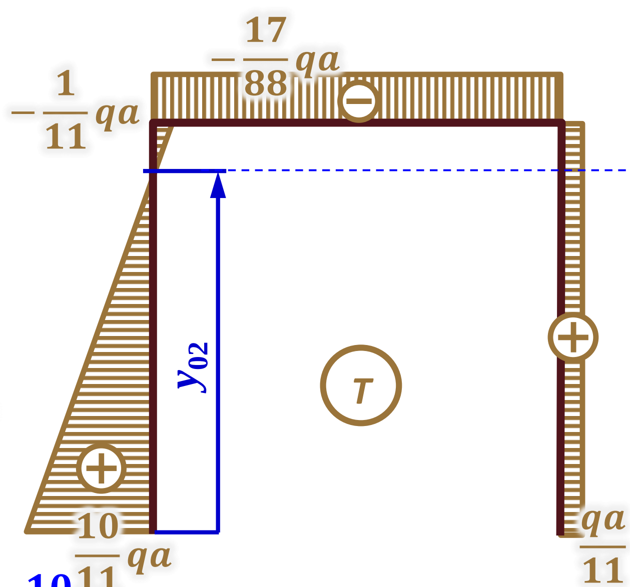
Przykład 6.2:

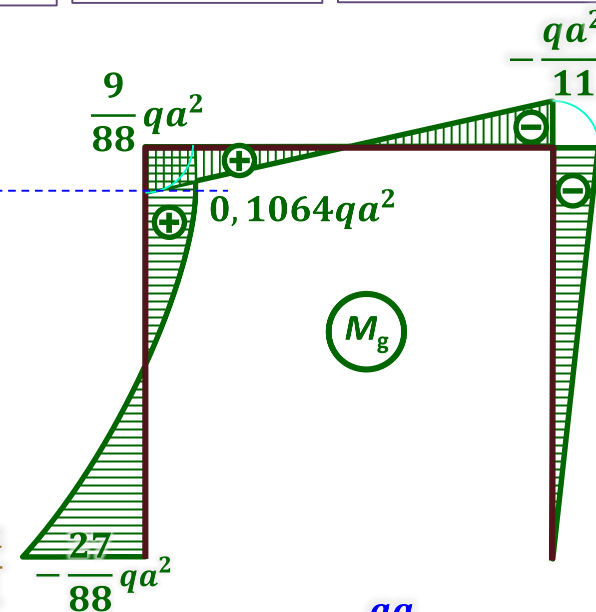
Dane: ***EJ*=const, *q*, *a***

Szukane: Wykresy $T(z)$, $M_g(z)$, $N(z)$

$$X_1 = \frac{qa}{11} \qquad X_2 = \frac{17}{88}qa \qquad R_{Ax} = \frac{10}{11}qa \qquad R_{Ay} = \frac{17}{88}qa \qquad M_A = \frac{27}{88}qa^2$$







$$T_{(y02)} = \frac{10}{11}qa - qy_{02} = 0 \Rightarrow y_{02} = \frac{10}{11}a$$

$$0 \le y_2 \le a: \quad M_{g(y2)} = -\frac{27}{88}qa^2 + \frac{10}{11}qay_2 - q\frac{y_2^2}{2};$$

$$M_{g(y2=0)} = -\frac{27}{88}qa^2; \quad M_{g(y02)} = 0,1064qa^2; \quad M_{g(y2=a)} = \frac{9}{88}qa^2;$$

$$M_{gD} = -X_1 \cdot a = -\frac{qa^2}{11}$$